第27講　指数関数・対数関数(3)

【基礎確認事項】

［1］　常用対数

□ 10を底とする対数 $\log_{10}x$ を**常用対数**という．x のいくつかの値に対して以下の表に表す．

x	$\cdots$	10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\cdots$
$\log_{10}x$	$\cdots$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	$\cdots$

□ $\log_{10}x$ は増加関数であることより，

x が1桁の数 $\iff 1\leqq x<10 \iff 10^0\leqq x<10^1 \iff 0\leqq \log_{10}x<1$

x が2桁の数 $\iff 10\leqq x<100 \iff 10^1\leqq x<10^2 \iff 1\leqq \log_{10}x<2$

である．一般に　以下のことが成り立つ．

> 自然数 N が n 桁 $\iff n-1\leqq \log_{10}N<n$

□ したがって，自然数 N の桁数を調べたいときは，$\log_{10}N$ の値を計算し，それがどの範囲にあるかを調べれば良い．N に対し，その対数の値を求めることを**対数をとる**という．値を求めるときに限らず，方程式や不等式においてもその両辺の対数をとることができる．

□ 同様に，以下のことが成り立つ．

> N の小数第 n 位に初めて0でない数が現れる $\iff -n\leqq \log_{10}N<-n+1$

⇒ C&U 1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 (1) 3^{30} は何桁の整数か．ただし，$\log_{10}3=0.4771$　とする．

(2) 0.2^{10} は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第27講　指数関数・対数関数(3)

1　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　18^{20} は何桁の数か．また最高位の数字，および末尾の数字を求めよ．

(2)　$(1.25)^n$ の整数部分が2桁であるような整数 n の範囲を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする．

(2) $2^x = 3^y = 12^z$，$xyz \neq 0$ のとき，$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})-3$　について，次の問いに答えよ．

(1)　2^x+2^{-x} のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおき，$f(x)$ を t を用いて表せ．また，$f(x)$ の最小値を求めよ．

[2]　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_x y+\log_y x$ の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第27講　指数関数・対数関数(3)

［1］　$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とするとき，3^{37} は **アイ** 桁の数である．また，3^{37} の最高位の数字は **ウ** であり，1の位の数字は **エ** である．

［2］　関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値を求めたい．$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，t のとりうる値の範囲は $t\geqq$ **オ** である．また，$f(x)$ を t を用いて表すと $f(x)=t^2-$ **カ** $t+$ **キク** である．よって $f(x)$ の最小値は **ケコ** である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 27 講　指数関数・対数関数(3)

【CHECK & UP】

1 (1)　$\log_{10}3^{30}=30\log_{10}3=30\times0.4771=14.313$

よって　$3^{30}=10^{14.313}$　より　$10^{14}<3^{30}<10^{15}$

したがって　3^{30} は **15 桁**の数である.

底を 10 とする常用対数のうち，$\log_{10}3=0.4771$ が与えられている．これにより，3 を底とする指数 3^{30} を，10 を底とする指数に変換することができる．10 を底とすることにより，その指数部から「けた」を知ることができる．10^1 で 2 桁になり，10^2 で 3 桁になる．同様にして，$10^{14.313}$ は 10^{14} で 15 桁になり，10^{15} には届いていないから 16 桁にはなっていないことがわかる.

(2)　$\log_{10}0.2^{10}=\log_{10}\left(\dfrac{2}{10}\right)^{10}=10(\log_{10}2-\log_{10}10)$

$=10(0.3010-1)=-6.990$

よって　$0.2^{10}=10^{-6.990}$　より　$10^{-7}<10^{-6.990}<10^{-6}$

したがって　**小数第 7 位**に初めて 0 でない数字が現れる.

小数首位の問題．10^{-6} は小数第 6 位に初めて 0 でない数である「1」が現れる．$10^{-6.990}$ はそれより小さいため，小数第 6 位は「0」である．そして 10^{-7} よりは大きいので，小数第 7 位は 0 ではない．したがって小数第 7 位に初めて 0 でない数が現れるのである.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 27 講　指数関数・対数関数(3)

1　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　18^{20} は何桁の数か．また最高位の数字，および末尾の数字を求めよ．

(2)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁であるような整数 n の範囲を求めよ．

(1)　$\log_{10}18^{20}=20\log_{10}2\cdot 3^2=20(\log_{10}2+2\log_{10}3)=25.104$

よって　$18^{20}=10^{25.104}=10^{0.104}\times 10^{25}$　　よって　18^{20} は **26 桁の数**である．

また $10^0=1$　　$10^{0.3010}=2$　より　$1<10^{0.104}<2$　　よって最高位の数字は **1**

さらに　18^n の 1 の位は　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$ のとき順に 8，4，2，6，8，…… であり，4 つ周期で 8，4，2，6 を繰り返す．　よって　$18^{20}=18^{4\times 5}$ の 1 の位は　**6**

(2)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁より，$10^1\leqq(1.25)^n<10^2$　　つまり　$1\leqq\log_{10}1.25^n<2$

$\log_{10}1.25^n=n\log_{10}1.25=n(\log_{10}\frac{10}{8})=n(1-3\log_{10}2)=n(1-0.9030)=0.097n$

よって　$1\leqq 0.097n<2$　より　$\frac{1}{0.097}\leqq n<\frac{2}{0.097}$　　$10.3\cdots\leqq n<20.6\cdots$

したがって整数 n の範囲は　$\boldsymbol{11\leqq n\leqq 20}$

2　(1)　$\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{10000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

(2)　$2^x=3^y=12^z$，$xyz\neq 0$　のとき，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$　の値を求めよ．

(1)　$\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{10000}$ より　$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\log_{10}\frac{1}{10000}$　$-n(\log_{10}2)<-4$

よって　$n>\frac{4}{\log_{10}2}=13.2\cdots\cdots$　より　求める自然数 n の最小値は　$\boldsymbol{n=14}$

(2)　$2^x=3^y=12^z=k$　とおくと，$xyz\neq 0$ より $k\neq 1$

$x=\log_2 k=\frac{\log_{10}k}{\log_{10}2}$

$y=\log_3 k=\frac{\log_{10}k}{\log_{10}3}$

$z=\log_{12}k=\frac{\log_{10}k}{\log_{10}12}=\frac{\log_{10}k}{2\log_{10}2+\log_{10}3}$

したがって　$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{2\log_{10}2}{\log_{10}k}+\frac{\log_{10}3}{\log_{10}k}-\frac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}k}=\mathbf{0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})-3$　について，次の問いに答えよ．

(1)　2^x+2^{-x} のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおき，$f(x)$ を t を用いて表せ．また，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(1)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より　相加平均と相乗平均の関係から

$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$　　等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=0$ のとき．

したがって　$\boldsymbol{2^x+2^{-x}\geqq 2}$

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおくと　(1)より　$t\geqq 2$

また，$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=t^2-2$

よって　$f(x)=t^2-2-t-3=\boldsymbol{t^2-t-5}$

$f(x)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$　$(t\geqq 2)$　より　$t=2$　つまり　$x=0$ のとき　最小値　**−3**

3 [2]　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_x y+\log_y x$ の最小値を求めよ．

$x>1$，$y>1$ のとき　$\log_x y>0$

$\log_x y+\log_y x=\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\geqq 2\sqrt{\log_x y.\frac{1}{\log_x y}}=2$

等号成立は　$\log_x y=\frac{1}{\log_x y}$　　$(\log_x y)^2=1$　　$\log_x y=1$　　よって $x=y$ のとき．

したがって求める最小値は　**2**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 27 講　指数関数・対数関数(3)

［1］　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき，3^{37} は **アイ** 桁の数である．また，3^{37} の最高位の数字は **ウ** であり，1 の位の数字は **エ** である．

［2］　関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値を求めたい．$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，t のとりうる値の範囲は $t\geqq$ **オ** である．また，$f(x)$ を t を用いて表すと $f(x)=t^2-$ **カ** $t+$ **キク** である．よって $f(x)$ の最小値は **ケコ** である．

［1］　$\log_{10}3^{37}=37\log_{10}3=37\times0.4771=17.6527$

よって　$3^{37}=10^{17.6527}=10^{0.6527}\times10^{17}$　より　3^{37} は **18** 桁の数である．

また，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$　　つまり　$10^{0.6020}=4$　であり

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-\log_{10}2=0.6990$$　である．

よって　$4<10^{0.6527}<5$　より　$10^{0.6527}$ の整数部分は 4

したがって　3^{37} の最高位の数字は **4** である．

さらに，3^n の 1 の位は　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$ のとき 3，9，7，1，3，…… と 3，9，7，1 を繰り返す．したがって $3^{37}=3^{4\times9+1}$　の 1 の位は **3** である．

［2］　$2^x>0$ より　相加平均と相乗平均の関係から

$$t=2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=2$$　等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=0$ のとき．

よって　t のとりうる値の範囲は　$t\geqq\mathbf{2}$　である．

$$\begin{aligned}f(x)&=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16\\&=(2^x)^2+(2^{-x})^2-8\cdot2^x-8\cdot2^{-x}+16\\&=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}-8(2^x+2^{-x})+16\\&=t^2-\mathbf{8}t+\mathbf{14}\end{aligned}$$

よって　$t\geqq2$ において　$f(x)=(t-4)^2-2$ は　$t=4$ のとき最小値 $\mathbf{-2}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。